

認識軌道運動練習紙

引力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nkg}^{-2}\text{m}^2$ 地球質量 $= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ 地球半徑 $= 6.37 \times 10^6 \text{ m}$

1. 寫出萬有引力方程
2. 寫出圓周運動向心力的兩個表達項式
3. 證明開普勒第三定律
4. 證明宇宙第一速度 ($\sim 8 \text{ km s}^{-1}$)
5. 計算同步衛星的軌道半徑及在地面上空多少距離
6. 寫出小天體在大天體下作圓周運動的動能和勢能表示項
7. 證明宇宙第二速度 (逃逸速度)
8. 寫出小天體在大天體下作圓周運動的總機械能

認識軌道運動練習紙

引力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nkg}^{-2}\text{m}^2$ 地球質量 $= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ 地球半徑 $= 6.37 \times 10^6 \text{ m}$

1. 寫出萬有引力方程

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

2. 寫出圓周運動向心力的兩個表達項式

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

3. 證明開普勒第三定律

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \quad \therefore \frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}$$

4. 證明宇宙第一速度 ()

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{6.37 \times 10^6}} = 7906 \text{ m s}^{-1} \approx 8 \text{ km s}^{-1}$$

5. 計算同步衛星的軌道半徑及在地面上空多少距離 ($T = 24 \text{ hrs} = 86400 \text{ s}$)

見近地面時 $g = \frac{GM}{r^2} = 9.81 \text{ N kg}^{-1}$

$$GM = 9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2 = 3.98 \times 10^{14}$$

$$\frac{GM}{R^2} = m \left(\frac{2\pi}{86400} \right)^2 R \Rightarrow 3.98 \times 10^{14} = 5.288 \times 10^{-9} R^3$$

$$R = 42.2 \times 10^6 \text{ m}, \quad h = 35.8 \times 10^6 \text{ m}$$

6. 寫出小天體在大天體下作圓周運動的動能和勢能表示項

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

7. 證明宇宙第二速度 (逃逸速度) V_e escape

在地面

在無限遠

總機械能 $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_E} = \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{GMm}{\infty} = 11180 \text{ m s}^{-1} \approx 11 \text{ km s}^{-1}$

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R_E} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R_E}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{6.37 \times 10^6}}$$

8. 寫出小天體在大天體下作圓周運動的總機械能

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$